Erinnerung:

$v \in \mathrm{Eig}_{\lambda,f} \Longleftrightarrow f(v) = \lambda v.$

Sei f ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V.

Definition: Ein Element $\lambda \in K$ ist ein *Eigenwert* von f genau dann, wenn der Unterraum

$$\mathrm{Eig}_{\lambda,f} \;:=\; \mathrm{Kern}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) \;\subset\; V$$

ungleich Null ist. Dieser heisst dann der zu λ gehörende *Eigenraum von* f. Seine von Null verschiedenen Elemente sind die *Eigenvektoren von f zum Eigenwert* λ. Die Dimension von $\mathrm{Eig}_{\lambda,f}$ heisst die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

$\geq 1.$

Proposition: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f. Dann ist die folgende lineare Abbildung injektiv:

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1,f} \times \ldots \times \mathrm{Eig}_{\lambda_r,f} \longrightarrow V, \quad (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 + \ldots + v_r.$$

Ab jetzt sei V endlich-dimensional.

Definition: Ist B eine geordnete Basis von V der Länge n, so ist das *charakteristische Polynom* von f

$$\mathrm{char}_f(X) \;:=\; \det(X \cdot I_n - {}_B[f]_B) \;\in\; K[X].$$

normiert vom Grad n.

Proposition: Für jedes $\lambda \in K$ gilt

$$\boxed{\mathrm{char}_f(\lambda) \;=\; \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f).}$$

Satz: Die Eigenwerte von f sind genau die Nullstellen von $\mathrm{char}_f(X)$ in K.

Bew.: $\lambda \in K$ ist EW von $f \iff \mathrm{Kern}(\lambda \cdot id_V - f) \neq 0$

$\iff \lambda \cdot id_V - f$ kein Isom.

$\iff \det(\lambda \cdot id_V - f) = 0$

$\iff \mathrm{char}_f(\lambda) = 0$.

qed.

Folge: (a) Es gibt höchstens endlich viele Eigenwerte von f.

(b) Ist $V \neq 0$ und K algebraisch abgeschlossen, so gibt es Eigenwerte von f.

$\deg \mathrm{char}_f(X) \geq 1$
$\Rightarrow \exists$ Nullstelle.

Definition: Die *arithmetische Vielfachheit* eines Eigenwerts $\lambda \in K$ von f ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\mathrm{char}_f(X)$.

Folge: Die Anzahl der Eigenwerte von f, mit arithmetischen Vielfachheiten gezählt, ist $\leqslant \dim_K(V)$, und sogar $= \dim_K(V)$ wenn K algebraisch abgeschlossen ist.

Nach Konstruktion sind die geometrische Vielfachheit und die arithmetische Vielfachheit jedes Eigenwerts > 0.

Satz: Die geometrische Vielfachheit ist stets $\leqslant$ der arithmetischen Vielfachheit.

Bew.: Sei $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von $\mathrm{Eig}_{\lambda, f}$. Ergänze zu einer geordneten Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V. $\Rightarrow f(v_i) = \lambda v_i$ für $1 \le i \le m$.

$$\Rightarrow {}_B[f]_B = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & * \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, m \\ \\ \}\, n-m \end{array} \Rightarrow \mathrm{char}_f(X) = \det \left(\begin{array}{cc|c} X-\lambda & 0 & \\ 0 & X-\lambda & * \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & * \end{array}\right) = (X-\lambda)^m \cdot (*)$$

$\Rightarrow$ arith. Mult. $\geq m$. q.e.d.

Definition: Die Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräume einer $n \times n$-Matrix A über K sind die Eigenwerte, Eigenvektoren, bzw. Eigenräume des Endomorphismus $L_A \colon K^n \to K^n$.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{char}_f(X) = \det \left(\begin{array}{c|c} X-1 & -1 \\ \hline 0 & X-1 \end{array}\right) = (X-1)^2$.

$\Rightarrow$ einziger EW $\lambda = 1$, arith. Vielfachheit $= 2$

geom. " $= 1$

$\boxed{\text{nicht diag.bar!}}$

$$\mathrm{Ker}(1 \cdot \mathrm{id} - L_A) = \left\{ v \in K^2 \,\middle|\, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right](v) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8.3 Diagonalisierbarkeit

Sei weiterhin f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

Proposition: Für jede geordnete Basis B von V sind äquivalent: $B = (v_1, \ldots, v_n)$

(a) Die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ ist eine Diagonalmatrix.

(b) Die Basis B besteht aus Eigenvektoren von f.

Bew.: (b) $\Leftrightarrow \forall i: f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ für ein $\lambda_i \in K$.

$\Leftrightarrow \forall i:$ i-te Spalte von ${}_B[f]_B$ hat höchstens an der i-ten Stelle $\neq 0$.

$\Leftrightarrow {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$ diagonal. $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ qed.

Definition: Besitzt V eine solche Basis B, so heisst f *diagonalisierbar*.

Satz: Ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar genau dann, wenn $\mathrm{char}_f(X)$ über K in Linearfaktoren zerfällt und für alle Eigenwerte von f die geometrische Vielfachheit gleich der arithmetischen Vielfachheit ist.

Bew.: "$\Rightarrow$" f diag.bar, ${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{char}_f(X) = \det \begin{pmatrix} X-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X-\lambda_n \end{pmatrix}$

$= \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. $\forall i: f(v_i) = \lambda v_i \Rightarrow v_i \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i, f}$.

$\Rightarrow \forall \lambda$ EW von f: $\dim \mathrm{Eig}_{\lambda, f} \geq \#\{i \mid \lambda = \lambda_i\} =$ arithm. Vielfachheit.

"
geom. Vielfachheit $\Rightarrow$ gleich.

"$\Leftarrow$": Sei $\mathrm{char}_f(X) = \prod_{j=1}^{m} (X-\mu_j)^{m_j}$; μ_j paarweise verschieden in K, $m_j \geq 1$ arithm. Vielf. von μ_j.

$\Rightarrow \forall j$: $\dim \mathrm{Eig}_{\mu_j, f} = m_j$. Sei $v_{j,1}, \dots, v_{j,m_j}$ eine Basis.

$$\left.\begin{array}{l} \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Eig}_{\mu_j, f} \hookrightarrow V \\ \dim = \sum_{j=1}^{m} m_j = \deg(\mathrm{char}_f(X)) = \dim(V). \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Isom!}$$

$\Rightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Eig}_{\mu_j, f} = V$. $\Rightarrow \left\{ v_{j,k} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq m_j \end{array} \right\}$ Basis von V aus Eigenvektoren.

$\Longrightarrow f$ diag.bar.

qed.

Folge: Zerfällt $\mathrm{char}_f(X)$ über K in Linearfaktoren und haben alle seine Nullstellen die Vielfachheit 1, so ist f diagonalisierbar.

Bew.: $1 \leq$ geom. Vielfachheit $\leq$ arith. Vielfachheit $= 1$. $\Rightarrow$ Gleichheit.

qed.

Proposition: Sei A eine $n \times n$-Matrix A über K. Für eine invertierbare Matrix U ist $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix genau dann, wenn die Spalten von U eine Basis aus Eigenvektoren von A bilden. Ausserdem sind äquivalent:

(a) Der Endomorphismus $L_A\colon K^n \to K^n$ ist diagonalisierbar.

(b) Die Matrix A ist ähnlich über K zu einer Diagonalmatrix.

Definition: Eine solche Matrix A heisst *diagonalisierbar über K*.

Bew.: Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von K^n.

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \forall i: U^{-1}AUe_i = \lambda_i e_i$$

$$\Longleftrightarrow \forall i: AUe_i = U\lambda_i e_i = \lambda_i U e_i$$

$U = (v_1, \ldots, v_n) \Rightarrow Ue_i = v_i$ $\quad \Longleftrightarrow \forall i: Av_i = \lambda_i v_i$.

L_A diag.bar $\Longleftrightarrow$ $\exists$ geord. Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ aus EVen $\Longleftrightarrow$ $\exists U$ invbar: $U^{-1}AU =$ diag.

qed.

Beispiel: Die reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ hat charakteristisches Polynom $X^2 - 10X + 16 = (X-2)(X-8)$ und somit zwei verschiedene Eigenwerte der arithmetischen Vielfachheit 1 in $\mathbb{R}$. Also ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{char}_A(X) = \det\begin{pmatrix} X-5 & -3 \\ -3 & X-5 \end{pmatrix} = (X-5)^2 - (-3)^2 = X^2 - 10X + 16$$

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Eig}_{2,f}.$$

$$\dots = 8\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Eig}_{8,f}$$

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Die reelle Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ repräsentiert eine Drehung um 90° in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Ihr charakteristisches Polynom ist $X^2 + 1$ und hat somit keine Nullstellen in $\mathbb{R}$. Also ist B nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$. Über $\mathbb{C}$ hat das charakterische Polynom jedoch zwei verschiedene einfache Nullstellen $\pm i$. Also ist B diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

$$\mathrm{char}_B(X) = \det\begin{pmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = X^2 + 1 \qquad \text{nicht diagbar über } \mathbb{R}.$$

über $\mathbb{C}$: $\quad X^2 + 1 = (X - i)(X + i) \qquad$ diagbar über $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Eig}_{i,B} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle \qquad U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1}BU = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}_{-i,B} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Beispiel: Die Matrix $C := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ über einem beliebigen Körper hat charakteristisches Polynom $(X-1)^2$ und somit nur den Eigenwert 1 der arithmetischen Vielfachheit 2. Der zugehörige Eigenraum $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ hat aber Dimension 1, also ist die geometrische Vielfachheit gleich 1. Somit ist C nicht diagonalisierbar.

$$U^{-1} A U = D$$

$$\Updownarrow$$

Anwendung: Sei A diagonalisierbar, also $A = UDU^{-1}$ für eine invertierbare $n \times n$-Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann sind die Potenzen von A gegeben durch:

$$A^m \;=\; UD^mU^{-1} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \cdot UE_{ii}U^{-1}.$$

$$A^m = (UDU^{-1})^m = UD\underbrace{U^{-1} \cdot U}D\underbrace{U^{-1} \cdots\cdots U}DU^{-1} = UD^mU^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}$$

$$= U\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m E_{ii}\right)U^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \cdot (UE_{ii}U^{-1}).$$

Bsp.: Fibonacci: $F_0 := 0$

$F_1 := 1$

$F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für alle $n \geq 2$.

Setze $v_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n > 0$ $\quad v_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_n + F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}}_{v_{n-1}}$

$\Rightarrow v_n = A^n \cdot v_0 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{char}_A(X) = \det \begin{pmatrix} X-0 & -1 \\ -1 & X-1 \end{pmatrix} = X(X-1) - (-1)^2 = X^2 - X - 1.$

$= (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow A$ diag.bar.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 \\ 1 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \qquad w_i := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix}$

$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^n = \lambda_1^n \cdot U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1} + \lambda_2^n \cdot U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^{-1} = \ldots$

$$U^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = v_n = A^n v_0 = A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1^n \cdot U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2^n \cdot U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1^n \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} + \lambda_2^n \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_n = \lambda_1^n \cdot \frac{-1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$